MATHÉMATIQUES | **Documents, calculatrices et téléphones portables interdits**

2024
Concours cadre de direction

Les exercices 1, 2 et 3 sont obligatoires.
Les candidats ont le choix entre les exercices 4 et 5.
Les exercices sont indépendants.
Il est demandé aux candidats de justifier les calculs dans les exercices 2 à 5.
Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Exercice 1 `(5 points)`
Une seule réponse est correcte parmi les quatre réponses proposées.

Question n° 1 : Que peut-on dire d'une suite réelle qui vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n^2} = 0$?

A. La suite a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$.
B. La suite a pour terme général $u_n = n$, $n \geq 1$.
C. La suite vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 u_n = +\infty$.
D. La suite vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n^3} = 0$.

Question n° 2 : Quelle est la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 x\ln(x)\,dx$?

A. $I = 0$.
B. $I = \ln(4) - \frac{3}{4}$.
C. $I = \ln(2) - \frac{3}{2}$.
D. $I = \ln(4) - \frac{3}{2}$.

Question n° 3 : Quel est le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$?

A. On a $\operatorname{rg}(A) = 0$.
B. On a $\operatorname{rg}(A) = 1$.
C. On a $\operatorname{rg}(A) = 2$.
D. On a $\operatorname{rg}(A) = 3$.

Question n° 4 : Soit X une variable aléatoire continue suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[-2, 4]$. Quelle est la probabilité conditionnelle que $X \geq 3$ sachant que $X \geq 0$?

A. La probabilité conditionnelle vaut $\frac{1}{6}$.
B. La probabilité conditionnelle vaut $\frac{1}{4}$.
C. La probabilité conditionnelle vaut $\frac{2}{3}$.
D. Aucune des possibilités ci-dessus.

Question n° 5 : Une société fabrique des crayons de 6 couleurs différentes. Les crayons sont vendus en boites de 4 crayons ayant tous des couleurs différentes. Combien de telles boites peut-on proposer ?

A. On peut proposer 360 boites.

B. On peut proposer 120 boites.

C. On peut proposer 24 boites.

D. On peut proposer 15 boites.

Exercice 2 `(5 points)`

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$ et I_n la matrice identité. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ le polynôme caractéristique associé à A.
Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, on note $E_A(\lambda)$ le sous-espace propre associé.

1. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB - BA = A$.
   (a) On suppose en plus que A est inversible.
      i. Montrer qu'alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $P_B(\lambda) = P_{B+I_n}(\lambda)$.
      ii. En déduire que pour tout entier $k \geq 1$, $P_B(k) = P_B(0)$,
      puis que le polynôme $P_B(\lambda)$ est constant.
      iii. Conclure à une contradiction et donc que A n'est pas inversible.

   (b) Montrer que 0 est valeur propre de A. En déduire que $E_A(0)$ est stable par B, c'est-à-dire que si $x \in E_A(0)$, alors $Bx \in E_A(0)$.

   (c) Déduire de ce qui précède que A et B ont au moins un vecteur propre en commun.

2. Soit A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent.
   Montrer que A et B ont au moins un vecteur propre en commun.

Exercice 3 `(5 points)`

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, tel que $P(X_n = +1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$.

1. Calculer en fonction de n, la valeur de $\mathbb{E}[(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)^2]$.

2. Pour $0 < \alpha < 1$ fixé, montrer l'inégalité
$$P\Big(|X_1 + X_2 + \cdots + X_n| \geq \alpha n\Big) \leq \frac{1}{\alpha^2 n}.$$

3. Montrer que pour tout $n \geq 1$:
$$P\Big(|X_1 + X_2 + \cdots + X_n| \geq \alpha n\Big) = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^n}\binom{n}{p}\mathbb{I}_{\{p, |n-2p| \geq \alpha n\}}(p).$$
   où $\mathbb{I}_A$ est la fonction indicatrice de l'ensemble A.

4. Déduire de ce qui précède que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\mathbb{I}_{|n-2p|\geq \alpha n} = 0.$$

Un exercice au choix parmi :

Exercice 4 `(5 points)`
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2\alpha xy - y^2$.

1. Déterminer les points critiques de f, discuter suivant $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Le point $(0,0)$ est-il un extremum de f ?

Exercice 5 `(5 points)`
Cet exercice est constitué de deux parties indépendantes.

On considère un marché sur lequel sont négociés deux actifs : un actif sans risque qui verse 1 en T et dont le prix à la date t est noté B_t, ainsi qu'un actif risqué dont le prix est noté S_t. Dans la suite K est une constante réelle strictement positive.

Un call américain est un contrat par lequel le vendeur s'engage à livrer l'actif risqué S à un prix KB_t (strike) fixé à l'avance à une date t quelconque et antérieure à T si l'acheteur exerce son option en t. Le call européen correspondant est le contrat par lequel le vendeur s'engage à livrer le même actif risqué S au prix K (strike) à la date T si l'acheteur exerce son option.

On note C_t^a la valeur du call américain et C_t la valeur du call européen en t.

1. Montrer qu'en l'absence d'opportunité d'arbitrage : $C_t^a \geq C_t$.

2. On suppose que S_t est aléatoire et que $P(S_T > K) > 0$ et que $P(S_T < K) > 0$. Montrer qu'en l'absence d'opportunité d'arbitrage : $C_t > [S_t - KB_t]^+$.

3. En déduire que sous les hypothèses précédentes, il est toujours plus favorable de vendre une option américaine plutôt que de l'exercer.

On considère à présent une économie à deux dates données et à deux zones monétaires. On note les taux d'intérêt sur la période considérée : r_d le taux domestique et r_e le taux étranger.

On note par ailleurs τ_0 et τ_1 la valeur du taux de change domestique/étranger aux dates 0 et 1. Cela signifie que τ_t unités de monnaie domestique à la date t correspondent à 1 unité de monnaie étrangère.

On suppose qu'il y a parfaite mobilité des capitaux et absence d'opportunité d'arbitrage.

4. Quelle est la relation entre r_d, r_e, τ_0 et τ_1 ?